

## 不同滤波系数在电磁法数值计算中的应用研究

陈欣<sup>1</sup>,熊彬<sup>1</sup>,黄业中<sup>2</sup>,刘云龙<sup>1</sup>,罗天涯<sup>1</sup>,陈汉波<sup>1</sup>,吴延强<sup>1</sup>,郭胜男<sup>1</sup>

(1.桂林理工大学地球科学学院,广西 桂林 541006;2.防城港市国土资源局,广西 防城港 538001)

**摘要:**电磁法存在大量的汉克尔积分,由于积分核函数的复杂性,该类积分不存在解析解,采用数值方法求解汉克尔积分是电磁法正演研究中的关键问题。数值滤波法运算速度快、执行效率高,克服了被积函数的奇异性和高振荡性问题,是数值求解汉克尔积分的重要方法。采用存在解析解的汉克尔积分,对比研究了5套高精度汉克尔滤波系数,总结了不同数值滤波算法的计算精度和误差分布特点。结果表明,5套数字滤波的快速汉克尔变换算法在逼近相应的理论解析解时,不存在振荡现象,且计算精度高;汉克尔积分计算精度均随着收发距的增大而降低;计算精度并不一定随着数值滤波系数个数的增多而提高。分别采用5种滤波系数对水平电偶极子和垂直磁偶极子的电磁场进行计算,得到的电场和磁场的形态基本一致。

**关键词:**汉克尔积分;数值滤波法;电磁法

**中图分类号:**P631.325 **文献标识码:**B

**引文格式:**陈欣,熊彬,黄业中,等.不同滤波系数在电磁法数值计算中的应用研究[J].山东国土资源,2017,33(5):62-67.CHEN Xin, XIONG Bin, HUANG Yezhong, etc. Application of Several Sets of Filter Coefficients in Numerical Computation of Electromagnetic Fields[J]. Shandong Land and Resources, 2017,33(5):62-67.

## 0 引言

电(磁)法存在大量的广义积分,形如 $f(r) = \int_0^{\infty} K(\lambda) J_i(\lambda r) d\lambda, r > 0$ ,式 $J_i$ 中是 $i$ 阶贝塞尔函数;其广泛出现在轴对称问题中,如层状介质直流电阻率测深、电磁感应法电磁场的计算<sup>[1]</sup>;由于电磁响应积分核函数的复杂性,该积分并不存在解析解,数值计算求解汉克尔变换就成为电磁探测正演计算的基础性问题。在处理上述计算时所采用的诸多方法中,其中数值滤波法应用已算好的滤波系数进行汉克尔积分计算,其具有运算速度快、执行效率高等优点,克服了被积函数的奇异性和高振荡性的问题,比直接积分法计算效率高<sup>[2]</sup>。

汉克尔积分数值滤波方法被引入到地球物理领域后取得了较大的发展,Ghosh<sup>[3]</sup>首先提出了一种线性数值滤波方法计算上述汉克尔积分,随后 Koefoed 等<sup>[4]</sup>,Koefoed 和 Dirks<sup>[5]</sup>,Anderson<sup>[2,6-8]</sup>,Johansen

和 Sorensen<sup>[9]</sup>,Guptasarma<sup>[10]</sup>,Christensen<sup>[11-12]</sup>,Sorensen 和 Christensen<sup>[13]</sup>,Guptasarma 和 Singh<sup>[14]</sup>,Kong<sup>[15]</sup>等对线性滤波方法作了改进,伴随着数字滤波技术日益成熟,越来越多的长滤波系数具有较高的计算精度,选取最优的一套算法是很有必要的。张伟<sup>[16]</sup>对基于数字滤波法的快速汉克尔变换算法进行了公式推导,并用 GuptaSam 和 Singh 给出的线性滤波系数进行了计算,对比分析了该数值算法与理论解析式的误差分布特点,蔡胜<sup>[17]</sup>和李俊杰<sup>[18]</sup>分别对比了5组高精度快速汉克尔长滤波系数的计算精度及在电磁法探测计算中的应用,计算结果表明,801点系数计算精度较高,但耗时太大,耗时基本随着滤波系数的增加而增加。基于滤波系数的选取需权衡计算精度与计算效率,该文引入 Kong241滤波系数,同样选取了5套高精度滤波系数进行试算,将计算结果与理论解析式进行对比,分析这5套滤波系数的计算精度和误差分布特点,并结合其在实际电磁法探测中的应用,讨论了2种常用场源的

收稿日期:2016-11-23;修订日期:2017-02-04;编辑:陶卫卫

基金项目:国家自然科学基金项目(40974077,41164004,41674075)、广西自然科学基金项目(2016GXNSFGA380004)、广西高等学校高水平创新团队及卓越学者计划、桂林市“漓江学者”专项经费、“桂林理工大学研究生创新项目”(BS201601)联合资助

作者简介:陈欣(1992—),女,侗族,在读硕士研究生,主要从事电磁法数值模拟研究;E-mail:916306322@qq.com

计算情况。

### 1 常用数值滤波算法

汉克尔滤波系数权值的求取关系到数值滤波算法的精度,其大致可以分为 3 类:傅里叶变换法、Wiener-Hopf 最小二乘法、直接求取方法。这些方法都是以已知的有解析解的汉克尔积分式为基础,根据褶积理论,滤波响应决定已知的输入输出函数对来获取滤波系数权值。

(1) Johanson 200 滤波<sup>[19]</sup>:

$$f(r) = \left\{ \sum_{i=-75}^{124} [K(e^{ai}/r)] W_i \right\} / r \quad (1)$$

其中: $a = (\ln 10)/10$ ,为采样间隔; $W_i$ 为滤波权数; $K(e^{ai}/r)$ 为汉克变换核函数。

(2) Anderson 801 滤波<sup>[6]</sup>:

$$\lambda_i = (1/r) \times 10^{[a+(i-1)s]} \quad (2)$$

$$f(r) = \left\{ \sum_{i=1}^n K(\lambda_i) W_i \right\} / r \quad (3)$$

式中: $n = 801$ ,  $a = -1.304977637265126e + 01$ ,  $s = 0.04342944819033e-02$ 为已知的常数; $W_i$ 为滤波权数; $K(\lambda_i)$ 为汉克尔变换核函数。

(3) Guptasarma 与 B.Singh 滤波<sup>[14]</sup>:

$$\lambda_i = (1/r) \times 10^{[a+(i-1)s]} \quad (4)$$

$$f(r) = \left\{ \sum_{i=1}^n K(\lambda_i) W_i \right\} / r \quad (5)$$

其中:计算零阶汉克尔变换采用线性滤波器系数 G&S120,  $n = 120$ ,  $a = -8.388500$ ,  $s = 9.0422646867e-02$ ;计算一阶汉克尔变换采用线性滤波器系数 G&S140,  $n = 140$ ,  $a = -7.910019190$ ,  $s = 8.796714395e-02$ ;  $W_i$ 为滤波权数; $K(\lambda_i)$ 为汉克尔变换核函数。

(4) Kong 滤波<sup>[15]</sup>:

$$f(r) = \left\{ \sum_{i=-n}^n K(e^{ai}/r) W_i \right\} / r \quad (6)$$

其中:当  $n = 121$  时,  $a = 0.115$ ;当  $n = 241$  时,  $a = 0.065$ ;  $W_i$ 为滤波权数; $K(e^{ai}/r)$ 为汉克尔变换核函数。

### 2 算法验证

选用以下 4 个存在解析解的汉克尔数值积分例子进行验证:

算例 1:

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda^2} J_0(\lambda r) d\lambda = (1/2)e^{-r^2/4} \quad (7)$$

图 1 和图 2 分别是零阶滤波系数的计算结果和

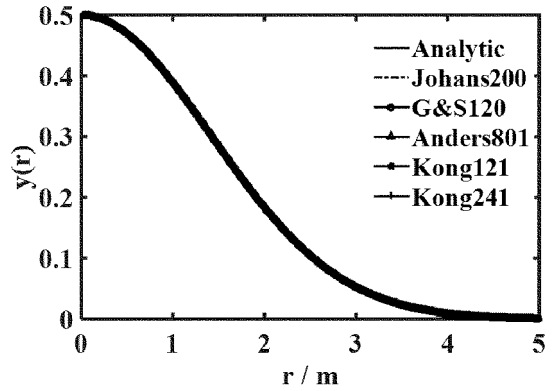


图 1 算例 1 数值计算与解析解的对比

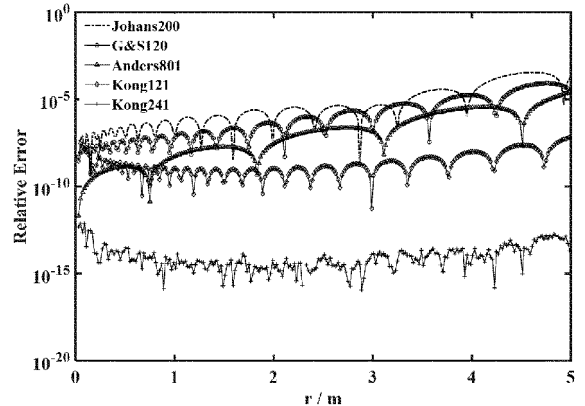


图 2 算例 1 数值计算与解析解的相对误差曲线

相对误差曲线,积分函数自变量取  $r = 0.01 \sim 5.0$ 。从图中易知,5 套数字滤波的快速汉克尔变换算法在逼近相应的理论解析解时,不存在振荡现象,且计算精度高<sup>[16]</sup>。当  $r < 0.8$  时, Kong121 滤波结果的计算精度低于 Anderson801 滤波;当  $r > 0.8$  时, Kong121 滤波方法的计算精度比 Anderson801 滤波高。从整体上看,滤波方法计算精度从高到低,依次为 Kong241 滤波, Kong121 滤波, Anderson801 滤波, G&S120 滤波, Johanson200 滤波;其中 Kong241 计算精度约数量级,其余 4 套滤波计算精度都小于 Kong241 滤波;这表明 Kong241 滤波方法具有较高的稳定性。

算例 2:

$$\int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda^2} J_1(\lambda r) d\lambda = (r/4)e^{-r^2/4} \quad (8)$$

图 3 和图 4 分别是一阶滤波系数的数值计算结果和相对误差曲线,积分函数自变量取  $r = 0.01 \sim 5.0$ 。从图中容易看出,5 套数字滤波方法的数值计算曲线形态与理论解析解一致,不存在振荡现象,且计算精度高<sup>[20]</sup>。当  $r < 1.2$  时, Kong121 滤波方法的

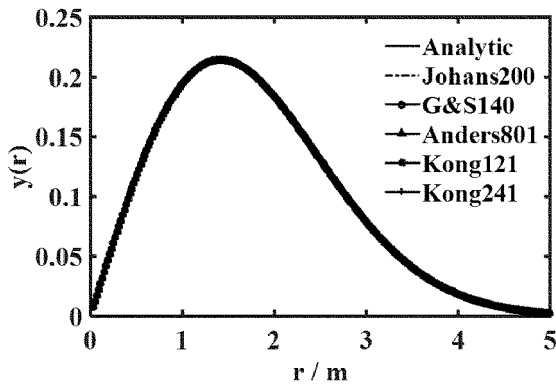


图 3 算例 2 数值计算与解析解的对比

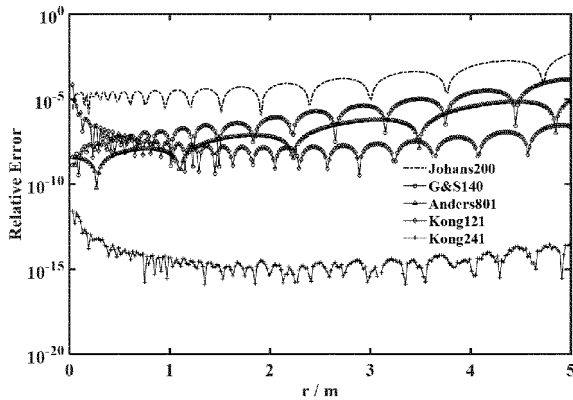


图 4 算例 2 数值计算与解析解的相对误差曲线

计算精度不如 Anderson801 滤波高;当  $r > 0.8$  时, Kong121 滤波方法的计算精度小于 G&S140 滤波;当  $r$  接近 0.01 时, Kong121 滤波方法的计算精度比 Johanson200 滤波差;从整体上看,滤波方法计算精度从高到低,依次为 Kong241 滤波、Kong121 滤波、Anderson801 滤波、G&S140 滤波、Johanson200 滤波。从图 4 容易看出, Kong241 计算精度约数量级,比其余 4 套滤波方法计算精度高出几个数量级;因此, Kong241 滤波算法适用性好。

电磁法勘探中,对于大发收距电磁场计算时常出现以下式(9)和式(10)的积分:

$$\int_0^\infty \frac{k}{\beta} e^{-\beta|z-z'|} J_0(k\rho) dk = \frac{e^{-\gamma R}}{R} \quad (9)$$

$$\int_0^\infty \frac{k^2}{\beta} e^{-\beta|z-z'|} J_0(k\rho) dk = \rho \frac{e^{-\gamma R}}{R^3} (\gamma R + 1) \quad (10)$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \gamma = \sqrt{i2\pi\mu_0 f \sigma}, \beta = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$$

式中: $z'$ 为发射源离地面的高度; $z$ 为接收点距地面的高度; $f$ 为发射频率; $\sigma$ 为介质电导率; $R$ 为收发距; $\gamma$ 和 $\beta$ 为相应的组合参数。

选取如下参数值进行试算: $z' = 50 \text{ m}, z = 0, f =$

1 Hz,  $\sigma = 3.2 \text{ s/m}$ 。

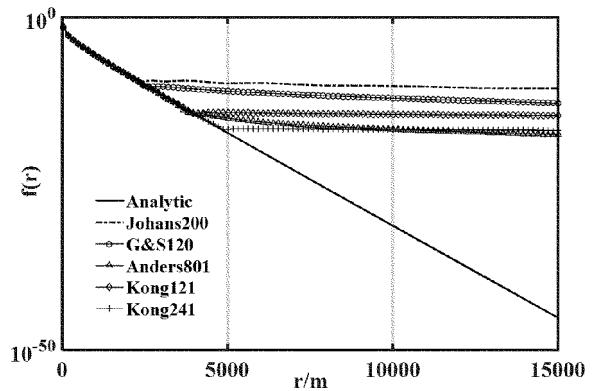


图 5 积分式(9)数值计算与解析解的对比

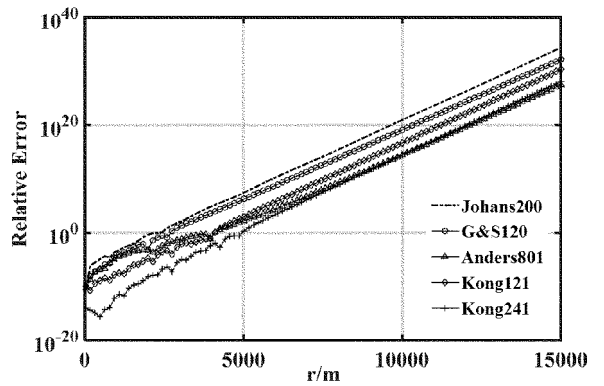


图 6 积分式(9)数值计算与解析解的相对误差曲线

图 5 为式(9)数值计算与解析解的对比,积分函数自变量取  $r = 1 \sim 15000 \text{ m}$ 。当  $r < 3000 \text{ m}$  时,5套滤波计算结果的曲线形态与解析解一致;随着  $r$  值继续增大,滤波结果曲线相继与解析解产生明显偏差;Johanson200, G&S120, Anderson801, Kong121, Kong241 滤波分别在收发距约为  $r = 3000, 4000, 6000, 6500, 10000 \text{ m}$  开始出现分异。图 6 为积分式(9)数值计算与解析解的相对误差曲线;由图所知,5套滤波的计算精度均随着收发距的增大而降低。

图 7 和图 8 分别为式(10)的数值计算与解析解的对比和相对误差曲线,积分函数自变量取  $r = 1 \sim 15000 \text{ m}$ 。当  $r < 2700 \text{ m}$  时,5套数字滤波算法的结果逼近相应的理论解析解;随着  $r$  值继续增大,滤波结果曲线与解析解出现分异且随  $r$  值增大而更加显著。G&S140 滤波约  $r = 2700 \text{ m}$  时开始出现偏差;Johanson 200 滤波约  $r = 3000 \text{ m}$  时出现偏差;Anderson801 和 Kong121 滤波约  $r = 6000 \text{ m}$  时开始出现偏差;Kong241 滤波约  $r = 10000 \text{ m}$  时出现偏差。从图

8 易知,5 套滤波的计算精度均与收发距反相关。

5 种高精度滤波分别对于含有零、一阶贝塞尔函数积分式(9)和式(10)进行计算,经上述分析表明,Kong241 滤波具有较高的计算精度,更适合长收发距电磁场计算。

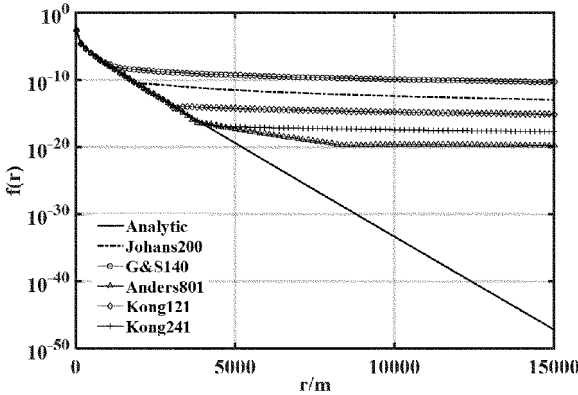


图 7 积分式(10)数值计算与解析解的对比

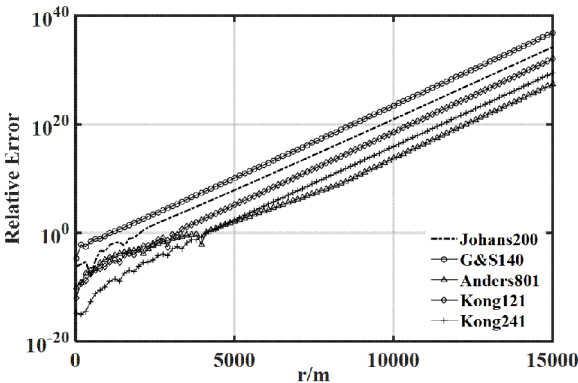


图 8 积分式(10)数值计算与解析解的相对误差曲线

### 3 数值算例

#### 3.1 水平电偶极子

海洋水平电偶极子产生水平电场的  $E_\rho$  分量(取沿着电偶源轴线方向)和垂直电场分量的表达式<sup>[21]</sup>:

$$E_\rho = \frac{IL}{4\pi\sigma} \int_0^\infty \left[ S(k\rho)\beta_0 R_{TM} - \frac{J_1(k\rho)}{\rho} \frac{r_0^2}{\beta_0} R_{TE} \right] e^{-\beta_0(z+z')} dk - \frac{IL}{4\pi\sigma} \int_0^\infty \left[ J_0(k\rho)k\beta_0 - \frac{J_1(k\rho)}{\rho} \frac{k^2}{\beta_0} \right] e^{-\beta_0|z-z'|} dk \quad (11)$$

$$E_z = -\frac{IL}{4\pi\sigma} \int_0^\infty [R_{TM}e^{-\beta_0(z+z')} + e^{-\beta_0|z-z'|}] k^2 J_1(k\rho) dk \quad (12)$$

其中: $S(k\rho) = kJ_0(k\rho) - \frac{J_1(k\rho)}{\rho}$ 。式中, $I$ 为通入偶极

源的电流强度; $L$ 为偶极子长度,取海底介质电导率取值为  $1 \text{ S/m}$ ;其余参数描述如同式(9)和式(10)的变量一致且选取参数值相同。

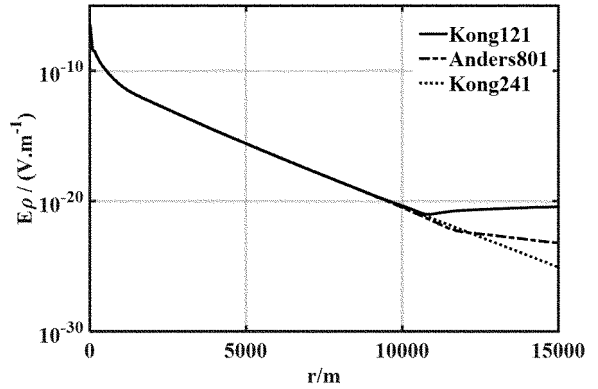


图 9 电场  $E_\rho$  的幅值

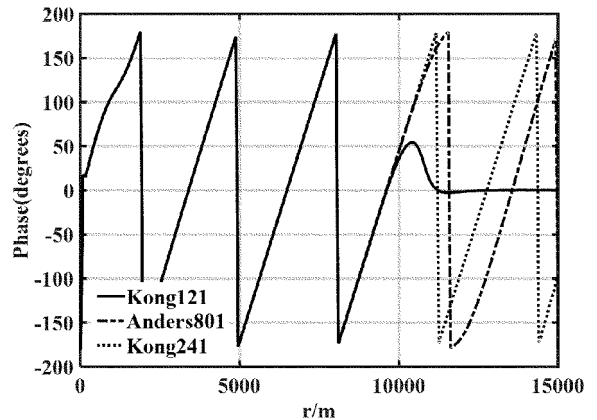


图 10 电场  $E_\rho$  的相位

图 9 和图 10 是场源为海洋水平电偶极子计算场的对比结果。尽管这个问题的解析解是未知的,但众所周知在远场的衰减率与波在均匀海底介质的传播情况相一致<sup>[15]</sup>,因此,Kong241 滤波算法的电场  $E_\rho$  幅值和相位随着收发距变化近似于线性变化,跟上述积分式(9)和式(10)的解析解的线性变化相似,甚至可以计算出远场微弱的幅值(当  $r = 15000 \text{ m}$  时, $E_\rho = 10^{-25} \text{ V/m}$ );其余 Kong121 和 Anderson801 滤波结果曲线在远场区均与 Kong241 滤波结果出现偏差。

图 11 和图 12 分别是电场  $E_z$  的幅值和相位随着收发距变化曲线。对 Kong241 和 Anderson801 滤波结果进行比较;当  $r < 11000 \text{ m}$  时,2 种滤波算法曲线形态一致;当  $r > 11000 \text{ m}$  时,则出现了分异。

#### 3.2 垂直磁偶极子

井中垂直磁偶极子的二次磁场  $H_z$  分量表达

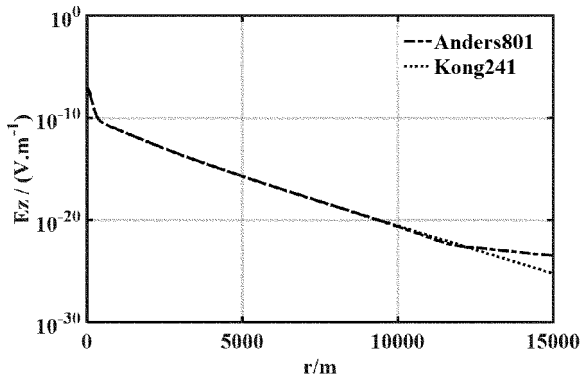


图 11 电场  $E_z$  的幅值

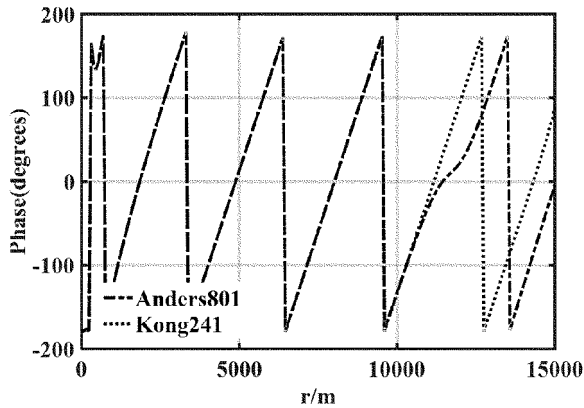


图 12 电场  $E_z$  的相位

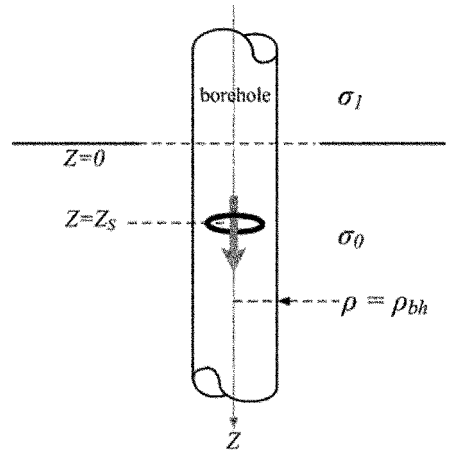


图 13 井中地电模型的示意图

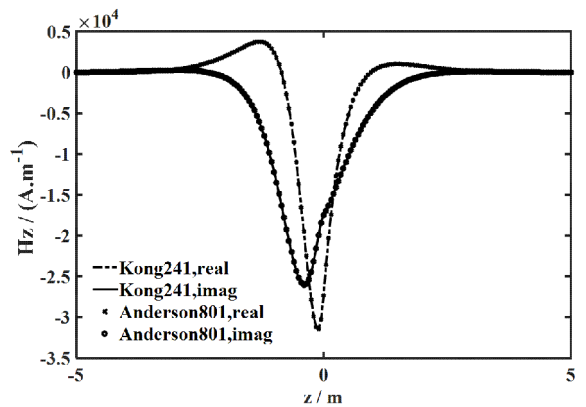


图 14 电场  $H_z$  的幅值

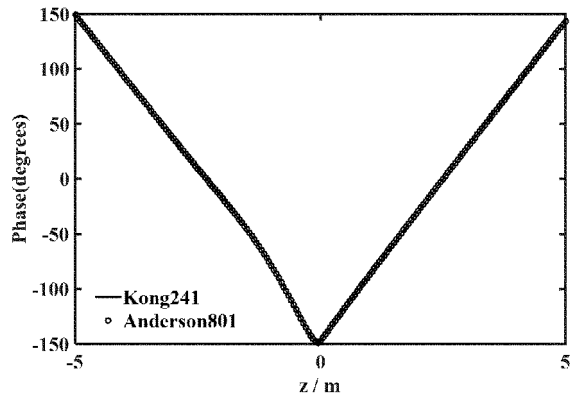


图 15 电场  $H_z$  的相位

式<sup>[22]</sup>：

$$H_z(z) = \frac{Ia}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{a_0} \exp(-a_0 z_s) [T \exp(a_1 z) - \exp(a_0 z)] J_1(\lambda a) d\lambda \quad z \leq 0 \quad (13)$$

$$H_z(z) = \frac{Ia}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{a_0} R \exp[-a_0(z+z_s)] J_1(\lambda a) d\lambda \quad z \geq 0 \quad (14)$$

其中： $R = (a_0 - a_1) / (a_0 + a_1)$ ,  $a_j^2 = \lambda^2 - i\mu_0 \omega \sigma_j$ ,  $j = 0, 1$   
 选取如下参数值进行试算： $I = 1.0e + 10A$ ,  $f = 2.5e + 06Hz$ ,  $z_s = 1.5 \text{ m}$ ,  $a = 0.01\text{m}$ ,  $\sigma_0 = 0.1\text{s/m}$ ,  $\sigma_1 = 1\text{s/m}$ 。

图 14、图 15 分别是二次磁场  $H_z$  的幅值和相位随着深度  $z$  的变化曲线。图 14 中点划线和叉号表示磁场  $H_z$  的实分量,实线和圆圈表示磁场  $H_z$  的虚分量;图 15 表示磁场  $H_z$  相位曲线。图中曲线光滑,不存在振荡现象,Kong241 与 Anderson801 的计算结果宏观上一致,但前者计算效率高于后者。

### 4 结论

(1) 汉克尔滤波系数的计算精度,并不一定随

着滤波系数个数的增多而提高,如文中 Kong241 点滤波系数比 Anderson801 点系数计算精度高。

(2) 采用 5 种高精度滤波算法分别对存在解析解并含有零阶和一阶贝塞尔函数的汉克尔数值积分式(7)至(10)进行计算;经计算结果对比分析表明,Kong241 滤波系数的计算精度最高,且无论自变量  $r$  取值大还是取值小,其应用效果最好。

总之,基于 5 套常用的高精度快速汉克尔滤波

系数在电磁法数值计算中的相关比较,均能较好地应用于电磁法数值计算。

## 参考文献:

- [1] 阮百尧. 均匀水平大地上频率域垂直磁偶源电磁场数值滤波解法[J]. 桂林工学院学报, 2005, 25(1): 14-18.
- [2] Anderson W.L. Numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering [J]. Geophysics, 1979, 44: 1287-1305.
- [3] Ghosh D.P. The application of linear filter theory to the direct interpretation of geoelectrical resistivity sounding measurement - s [J]. Geophysical Prospecting, 1971, 19: 192-217.
- [4] Koefoed et al. Computation of type curves for electromagnetic depth sounding with a horizontal transmitting coil by means of a digital linear filter[J]. Geophysical Prospecting, 1972, 20: 406-420.
- [5] Koefoed O and Dirks F.J. Determination o-f resistivity sounding filters by the Wien-er - Hopf least-squares method[J]. Geophysical Prospecting, 1979, 27: 245-250.
- [6] Anderson W.L. Fast Hankel transform usi-ng related and lagged convolution [J]. AC - M Transactions on Mathematical Software, 1982, 8: 344-368.
- [7] Anderson W.L. A hybrid fast Hankel tran-sform algorithm for electromagnetic mode-ling[J]. Geophysics, 1989, 54: 263 - 266.
- [8] Anderson W.L. Comment on 'Optimized fa-st Hankel transform filter' by Niels Boie Christensen [J]. Geophysical Prospecting, 1991, 39: 445-447.

- [9] Johansen H.K. and Sorensen K.I. Fast Ha-nkel transforms [J]. Geophysical Prospecting, 1979, 27: 876 - 901.
- [10] Guptasarma D. Optimization of shorter d- igital filters for increasing accuracy [J]. Geophysical Prospecting, 1982, 30: 501-514.
- [11] Christensen N.B. Optimized fast Hankel t -ransform filters [J]. Geophysical Prospecting, 1990, 38: 545-558.
- [12] Christensen N.B. Reply to comments by Walter L. Anderson [J]. Geophysical Prospecting, 1991, 39: 449-450.
- [13] Sorensen K.I. and Christensen N.B. The fields from a finite electrical dipole A new computational approach [J]. Geophysics, 1994, 59: 864-880.
- [14] D. Guptasarma, B. Singh. New digital li- near filters for Hankel J0 and J1 transfor- ms [J]. Geophysical Prospecting, 1997, 45: 745-762.
- [15] Kong F.N. Hankel transform filters for d- ipole antenna radiation in a conductive m -edium [J]. Geophysical Prospecting, 2007, 55: 83-89.
- [16] 张伟,王绪本,覃庆炎. 汉克尔变换的数值计算与精度的对比 [J]. 物探与化探, 2010, 34(6): 753-755
- [17] 蔡盛. 快速汉克尔变换及其在正演计算中的应用 [J]. 地球物理学进展, 2014, 29(3): 1384-1390.
- [18] 李俊杰, 严家斌. 汉克尔变换精度分析及在电磁法探测中的应用 [J]. 物探化探计算技术, 2013, 35(3): 288-293
- [19] 朴化荣. 电磁测深法原理 [M] (第一版). 北京: 地质出版社, 1990
- [20] 蔡盛, 柳建新, 汤文武, 等. 汉克尔自适应算法在电磁计算中的应用 [J]. 物探化探计算技术, 2014, 36(1): 16-21.

## Application of Several Sets of Filter Coefficients in Numerical Computation of Electromagnetic Fields

CHEN Xin<sup>1</sup>, XIONG Bin<sup>1</sup>, HUANG Yezhong<sup>2</sup>, LIU Yunlong<sup>1</sup>, LUO Tianya<sup>1</sup>, CHEN Hanbo<sup>1</sup>, WU Yanqiang<sup>1</sup>, GUO Shengnan<sup>1</sup>

(1. College of Earth Sciences of Guilin University of Technology, Guangxi Guilin 541006, China; 2. Fangchenggang Bureau of Land and Resources, Guangxi Fangchenggang 538001, China)

**Abstract:** Many kinds of Hankel integral appear in electromagnetic methods. Due to the complexity of the kernel function, there are no analytic solution for these Hankel integral. Thus numerical methods for the computation of Hankel integral play an important part in electromagnetic forward modeling. Numerical filtering methods is high efficient, overcome the singularity and high oscillation of the kernel functions, and become the most important methods for numerical computation of Hankel integral. In this work, by using Hankel integral which has analytic solution and comparing five numerical filtering coefficients, the computation accuracy and error distribution have been summarized. It is showed that in approximating the analytic solution, all five numerical filtering methods have no oscillation and have high accuracy. Computation accuracy for Hankel integral decreases with increasing of transmit- receive distance, and is not improved by increasing the number of filtering coefficients. Electromagnetic fields produced by horizontal electric dipole and vertical magnetic dipole are computed by the five numerical filtering methods, and the contour of the resultant fields are substantially consistent.

**Key words:** Hankel integral; numerical filtering methods; electromagnetic method